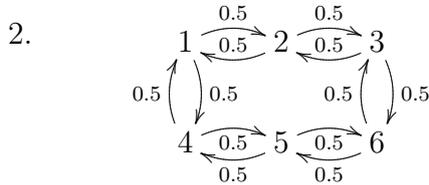
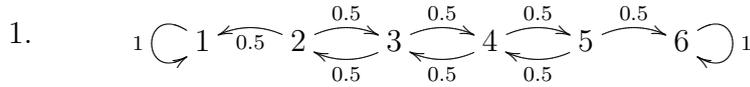


## Zufallsmatrizen

**Aufgabe 1** a) Notieren Sie die Übergangsmatrizen  $P$  zu den folgenden Graphen.



b) Berechnen Sie  $P^n \cdot \pi$  für  $\pi = {}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  für verschiedene  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Geben Sie die stationären Verteilungen der Übergangsmatrizen aus Teil a) an. Weisen Sie in einer Rechnung nach, dass es sich um stationäre Verteilungen handelt.

**Aufgabe 2** (*Das Gothenburg-Wetter*)

Alena glaubt nicht mehr an die Wettervorhersage; es scheint ihr besser, das morgige Wetter mithilfe von Wahrscheinlichkeiten für die Beibehaltung und die Änderung des Wetters zu berechnen.

Sie macht es sich leicht und sagt, dass es nur „Regen“ und „Sonnenschein“ gibt. Außerdem nutzt sie ihre eigene Erfahrung und sagt, dass sich das Wetter mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{4}$  ändert.

- Notieren Sie die Übergangsmatrix.
- Alena ärgert sich über den heutigen Regen und möchte gerne wissen, wie das Wetter in der nächsten Woche wird. Berechnen Sie das Wetter für die folgende Woche.
- Frederik widerspricht Alena bei der Annahme, wie sich das Wetter in den folgenden Tagen verändert. Er sagt, dass die Wetterentwicklung sich besser durch die folgende Matrix beschreiben lässt, wobei in der ersten Spalte die Übergänge von „Regen“ zu „Regen“ ( $P_{11}$ ) bzw. zu „Sonnenschein“ ( $P_{21}$ ) stehen. Analog stehen in der zweiten Spalte die Übergänge von „Sonne“ zu „Regen“ ( $P_{21}$ ) bzw. zu „Sonnenschein“ ( $P_{22}$ ):

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Wie ist hiermit die Vorhersage für die nächste Woche?

**Aufgabe 3** In dem Gitter der Orte und Wege aus Beispiel 1 werden zusätzlich die Ecken 1 mit 4 und 2 mit 3 durch Wege verbunden. Alle Wege werden mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt.

- Zeichnen Sie ein Pfaddiagramm und definieren Sie die Übergangsmatrix  $P$ .
- Ingo möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er nach einer langen Tour von Ecke 1 aus über fünf oder mehr Wege wieder an Ecke 1 ankommt. Claudia erklärt ihm, dass es für all diese Wege näherungsweise auf dieselbe Verteilung hinausläuft. Überprüfen Sie Claudias Behauptung.